Zeitschrift für Vermessungswesen

Herausgegeben im Auftrage des Deutschen Vereins für Vermessungswesen (DVW) e. V.
Schriftleitung: Prof. Dr.-Ing. R. Finsterwalder, München 2, Arcisstraße 21
und Prof. Dr.-Ing. W. Großmann, Hannover, Nienburger Straße 1
Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart N, Nordbahnhofstraße 16 · Postfach 147

Heft 10 | **Oktober 1961** | **86. Jahrgang**

Der Einfluß von Gewichts-Änderungen auf die Ausgleichungsergebnisse

Von H. Wolf (Bonn)

Im Juni-Heft 1961 der ZfV hat Herr Dr.-Ing. Linkwitz einen Beitrag[1]) zur vorstehenden Frage gebracht. Es kann jedoch gezeigt werden, daß die Ergebnisse kürzer auf direkte Weise ohne die Zuordnung gewisser „fiktiver Beobachtungen" zu erhalten sind, wobei zugleich der Fall der vermittelnden Beobachtungen miterledigt werden kann.

I. Wir wählen sogleich den (etwas weitläufigeren) Fall der *vermittelnden* Beobachtungen:
Verbesserungsgleichungen[2]): $\mathbf{v} = \mathbf{B}\,\mathbf{x} + \mathbf{l}$
Normalgleichungen: $\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{l} = \mathbf{o}$

Zerlegung in 2 Gruppen: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}\mathbf{v}_1\\ \mathbf{v}_2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{B}_2\end{pmatrix}$, $\mathbf{l} = \begin{pmatrix}\mathbf{l}_1\\ \mathbf{l}_2\end{pmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix}\mathbf{P}_1, \mathbf{0}\\ \mathbf{0}, \mathbf{P}_2\end{pmatrix}$,

so daß $\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B} = \mathbf{B}_1'\mathbf{P}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2'\mathbf{P}_2\mathbf{B}_2 = \mathbf{N}_B$

$\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{l} = \mathbf{B}_1'\mathbf{P}_1\mathbf{l}_1 + \mathbf{B}_2'\mathbf{P}_2\mathbf{l}_2 = \mathbf{n}_B$

Ändern sich die Gewichte $\mathbf{P}_2$ um $\Delta\mathbf{P}_2$, so werden sich $\mathbf{N}_B$, $\mathbf{x}$ und $\mathbf{n}_B$ um $\Delta\mathbf{N}_B$, $\Delta\mathbf{x}$ und $\Delta\mathbf{n}_B$ ändern, so daß

$$(\mathbf{N}_B + \Delta\mathbf{N}_B)(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) + (\mathbf{n}_B + \Delta\mathbf{n}_B) = \mathbf{o}\,, \tag{1}$$

worin

$$\Delta\mathbf{N}_B = \mathbf{B}_2'\Delta\mathbf{P}_2\mathbf{B}_2 \quad \text{und} \quad \Delta\mathbf{n}_B = \mathbf{B}_2'\Delta\mathbf{P}_2\mathbf{l}_2\,, \tag{2}$$

so daß nach Multiplikation mit $\mathbf{B}_2\mathbf{N}_B^{-1}$ aus (1) folgt ($\mathbf{E}$ = Einheitsmatrix):

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) + \mathbf{B}_2\mathbf{N}_B^{-1}\mathbf{B}_2'\Delta\mathbf{P}_2\mathbf{B}_2(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) + \mathbf{B}_2\mathbf{N}_B^{-1}(\mathbf{n}_B + \Delta\mathbf{n}_B) = \mathbf{o}$$

oder $(\mathbf{E} + \mathbf{B}_2\mathbf{N}_B^{-1}\mathbf{B}_2'\Delta\mathbf{P}_2)\mathbf{B}_2(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = -\,\mathbf{B}_2\mathbf{N}_B^{-1}(\mathbf{n}_B + \Delta\mathbf{n}_B)$, womit
$\mathbf{B}_2(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = -\,(\mathbf{E} + \mathbf{B}_2\mathbf{N}_B^{-1}\mathbf{B}_2'\Delta\mathbf{P}_2)^{-1}\mathbf{B}_2\mathbf{N}_B^{-1}(\mathbf{n}_B + \Delta\mathbf{n}_B)$, weshalb

$$(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{N}_B^{-1}\mathbf{B}_2'\Delta\mathbf{P}_2(\mathbf{E} + \mathbf{B}_2\mathbf{N}_B^{-1}\mathbf{B}_2'\Delta\mathbf{P}_2)^{-1}\mathbf{B}_2\mathbf{N}_B^{-1}(\mathbf{n}_B + \Delta\mathbf{n}_B) - \mathbf{N}_B^{-1}(\mathbf{n}_B + \Delta\mathbf{n}_B)\,,$$

Ergebnis:

$$(\mathbf{N}_B + \Delta\mathbf{N}_B)^{-1} = \mathbf{N}_B^{-1} - \mathbf{N}_B^{-1}\mathbf{B}_2'\Delta\mathbf{P}_2(\mathbf{E} + \mathbf{B}_2\mathbf{N}_B^{-1}\mathbf{B}_2'\Delta\mathbf{P}_2)^{-1}\mathbf{B}_2\mathbf{N}_B^{-1} \tag{3}$$

Will man den Einfluß der Gewichtsänderung nicht nur auf die unbestimmte Lösung — d. i. auf $\mathbf{N}_B^{-1}$ — sondern auch auf die bestimmte Normalgleichungsauflösung — d. h. auf die Unbekannten $\mathbf{x}$ — ermitteln, so wird aus (1):
$-(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = (\mathbf{N}_B + \Delta\mathbf{N}_B)(\mathbf{n}_B + \Delta\mathbf{n}_B)$, woraus mit (2) und (3) sowie nach Subtraktion von $-\mathbf{x} = \mathbf{N}_B^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{l}$ und unter Substitution von $\mathbf{v}_2 = \mathbf{B}_2\mathbf{x} + \mathbf{l}_2 = -\mathbf{B}_2\mathbf{N}_B^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{l} + \mathbf{l}_2$ sich ergibt:

$$\Delta\mathbf{x} = -\,\mathbf{N}_B^{-1}\mathbf{B}_2'\Delta\mathbf{P}_2(\mathbf{E} + \mathbf{B}_2\mathbf{N}_B^{-1}\mathbf{B}_2'\Delta\mathbf{P}_2)^{-1}\mathbf{v}_2 \tag{4}$$

---

[1]) K. Linkwitz: Über den Einfluß verschiedener Gewichtsannahmen auf das Ausgleichungsergebnis bei bedingten Beobachtungen. ZfV 1961, S. 179 ff. — (Die hier gewählte Matrizenschreibweise wird auch im folgenden beibehalten!)

[2]) H. Wolf: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Vermessungstechn. Rdschau 1961, S. 271.

II.) Bei den *bedingten Beobachtungen* hat man[3]):
Bedingungsgleichungen: $\mathbf{A\,v} + \mathbf{w} = \mathbf{o}$
Normalgleichungen: $\mathbf{A\,Q\,A'\,k} + \mathbf{w} = \mathbf{o}$, mit $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$

Zerlegung: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$, $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}$,

so daß $\mathbf{A\,Q\,A'} = \mathbf{A}_1\mathbf{Q}_1\mathbf{A}_1' + \mathbf{A}_2\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_2' = \mathbf{N}_A$.

Seien $\Delta\mathbf{N}_A$ und $\Delta\mathbf{k}$ die Änderungen von $\mathbf{N}_A$ und $\mathbf{k}$, wenn sich $\mathbf{Q}_2$ um $\Delta\mathbf{Q}_2$ ändert, so gilt wie bei (1):

$$(\mathbf{N}_A + \Delta\mathbf{N}_A)(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}) + \mathbf{w} = \mathbf{o}\,, \qquad (5)$$

worin $\Delta\mathbf{N}_A = \mathbf{A}_2\,\Delta\mathbf{Q}_2\,\mathbf{A}_2$.

Nun hat man formal genau wie vorstehend bei den vermittelnden Beobachtungen zu verfahren, man hat dort lediglich für $\mathbf{N}_B$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{l}$ usw. nunmehr $\mathbf{N}_A$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{w}$ usw. zu setzen und $\mathbf{A}_2'\mathbf{k} = \mathbf{P}_2\mathbf{v}_2$ zu substituieren.

Dann erhält man auf dem gleichen Weg:

$$\Delta\mathbf{k} = -\,\mathbf{N}_A^{-1}\mathbf{A}_2\,\Delta\mathbf{Q}_2(\mathbf{E} + \mathbf{A}_2'\mathbf{N}_A^{-1}\mathbf{A}_2\,\Delta\mathbf{Q}_2)^{-1}\mathbf{P}_2\mathbf{v}_2 \qquad (6)$$

und

$$(\mathbf{N}_A + \Delta\mathbf{N}_A)^{-1} = \mathbf{N}_A^{-1} - \mathbf{N}_A^{-1}\mathbf{A}_2\,\Delta\mathbf{Q}_2(\mathbf{E} + \mathbf{A}_2'\mathbf{N}_A^{-1}\mathbf{A}_2\,\Delta\mathbf{Q}_2)^{-1}\mathbf{A}_2'\mathbf{N}_A^{-1} \qquad (7)$$

Gl. (6) ist die Gl. (10) bei Herrn Dr. LINKWITZ, zusammen mit dessen Gl. (16a) und der nachfolgenden — unbezifferten — Gleichung für $\mathbf{L}$. Und vorstehende Gleichung (7) ist Gl. (22) von Herrn Dr. LINKWITZ, zusammen mit dessen Gleichung für $\mathbf{L}$.

Bemerkungen

1. Mit $\Delta\mathbf{P}_2 = \Delta p_n$ erhält man die bekannten Formeln von C. F. GAUSS, die für den Sonderfall angegeben sind, daß sich *nur ein einziges* Gewicht p_n ändert:

$$\text{z. B.: } \Delta x_1 = -\,\frac{\alpha_n\,\Delta p_n\,v_n}{p_n + (a_n\alpha_n + b_n\beta_n + c_n\gamma_n + \ldots)\,\Delta p_n}\,, \quad \text{usw.} \qquad (8)$$

$$\Delta\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] = -\,\frac{\alpha_n\alpha_n}{p_n}S_n, \quad \Delta\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] = -\,\frac{\alpha_n\beta_n}{p_n}S_n{}^{4)} \quad \text{usw.}$$

mit

$$S_n = \frac{\Delta p_n}{p_n + (a_n\alpha_n + b_n\beta_n + c_n\gamma_n + \ldots)\,\Delta p_n} \qquad (9)$$

2. Wenn die Gewichtsänderungen nicht allzu groß sind, kann man unter Benutzung einer bekannten Reihenentwicklung folgende *Näherungsformeln* angeben:

für (3): $(\mathbf{N}_B + \Delta\mathbf{N}_B)^{-1} \approx \mathbf{N}_B^{-1} - \mathbf{N}_B^{-1}\mathbf{B}_2'\Delta\mathbf{P}_2(\mathbf{E} - \mathbf{B}_2\mathbf{N}_B^{-1}\mathbf{B}_2'\Delta\mathbf{P}_2 \pm \ldots)\,\mathbf{B}_2\mathbf{N}_B^{-1}$, (10)

für (4): $\Delta\mathbf{x} \approx -\,\mathbf{N}_B^{-1}\mathbf{B}_2'\Delta\mathbf{P}_2(\mathbf{E} - \mathbf{B}_2\mathbf{N}_B^{-1}\mathbf{B}_2'\Delta\mathbf{P}_2 \pm \ldots)\,\mathbf{v}_2$, (11)

für (6): $\Delta\mathbf{k} \approx -\,\mathbf{N}_A^{-1}\mathbf{A}_2\,\Delta\mathbf{Q}_2(\mathbf{E} - \mathbf{A}_2'\mathbf{N}_A^{-1}\mathbf{A}_2\,\Delta\mathbf{Q}_2 \pm \ldots)\,\mathbf{P}_2\mathbf{v}_2$, (12)

für (7): $(\mathbf{N}_A + \Delta\mathbf{N}_A)^{-1} \approx \mathbf{N}_A^{-1} - \mathbf{N}_A^{-1}\mathbf{A}_2\,\Delta\mathbf{Q}_2(\mathbf{E} - \mathbf{A}_2'\mathbf{N}_A^{-1}\mathbf{A}_2\,\Delta\mathbf{Q}_2 \pm \ldots)\,\mathbf{A}_2'\mathbf{N}_A^{-1}$ (13)

oder in noch gröberer Annäherung:

für (3): $\Delta(\mathbf{N}_B^{-1}) \approx -\,\mathbf{N}_B^{-1}\mathbf{B}_2'\Delta\mathbf{P}_2\mathbf{B}_2\mathbf{N}_B^{-1} \pm \ldots$, (14)

für (4): $\Delta\mathbf{x} \approx -\,\mathbf{N}_B^{-1}\mathbf{B}_2'\Delta\mathbf{P}_2\mathbf{v}_2 \pm \ldots$, (15)

für (6): $\Delta\mathbf{k} \approx -\,\mathbf{N}_A^{-1}\mathbf{A}_2\,\Delta\mathbf{Q}_2\mathbf{P}_2\mathbf{v}_2 \pm \ldots$, (16)

für (7): $\Delta(\mathbf{N}_A^{-1}) \approx -\,\mathbf{N}_A^{-1}\mathbf{A}_2\,\Delta\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_2'\mathbf{N}_A^{-1} \ldots$. (17)

3. Fall I (= *vermittelnde*) und Fall II (= *bedingte Beobachtungen*) lassen sich als Sonderfälle eines *allgemeinen* Ausgleichsproblemse darstellen, a. a. O.[2]), Seite 229.

---

[3]) wie [2]), a. a. O., S. 272.

[4]) Bei C. F. GAUSS ohne den Divisor p, bzw. p_n, d. h. nur für $\Delta[\alpha\alpha]$, $\Delta[\beta\beta]$, ... angegeben.